MATEMATICA III

CORSO DI LAUREA IN STATISTICA, ECONOMIA, FINANZA E ASSICURAZIONI
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE, INFORMATICA E STATISTICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
A.A. 22/23

DOCENTE: DOTT. GIULIO GALISE

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Prova scritta del 04.07.2023

Esercizio 1 *(7 punti).* Si considerino le funzioni

$$f_1(x,y) = \sqrt{y-x^2}\,\log(x^2+y^2)$$
$$f_2(x,y) = \sin(x)\cos(y).$$

Siano X_1 l'insieme di definizione di f_1 e $X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f_2(x,y) = 0\}$.

- Rappresentare graficamente gli insiemi X_1 e X_2.

Dire (senza giustificare la risposta) se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- X_1 è aperto $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
- La parte interna $\overset{\circ}{X}_1$ di X_1 è un insieme convesso $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
- X_2 è limitato $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
- X_2 è chiuso $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
- L'insieme $\partial X_1 \cap X_2$ è costituito solo da punti isolati $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

Esercizio 2 *(8 punti)*. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2} - 1 - x - 2y.$$

(i) Determinare per quali versori $\mathbf{v}$ risulta

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = 0.$$

(ii) Stabilire se la funzione è convessa in $\mathbb{R}^2$.

(iii) Stabilire se esiste una funzione $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = e^{x^2+y^2} - y \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \end{cases} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 3 *(8 punti)*. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = 2x + x^2 + 2y^2.$$

(i) Si provi che f ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$.
(Suggerimento: completare il quadrato nella variabile x, quindi concludere).

(ii) Calcolare

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f$$

e dire se si tratta di massimo assoluto.

(iii) Determinare massimo e minimo assoluti di f sulla circonferenza

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Esercizio 4 *(9 punti).*

(i) Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_D z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$$

essendo D la regione limitata di $\mathbb{R}^3$ compresa tra il paraboloide $z = x^2 + y^2$ ed il piano $z = 4$.

(ii) Stabilire la validità della disuguaglianza

$$\iiint_D z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz \geq \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} (x^3+y^5+z^7)\,dxdydz.$$